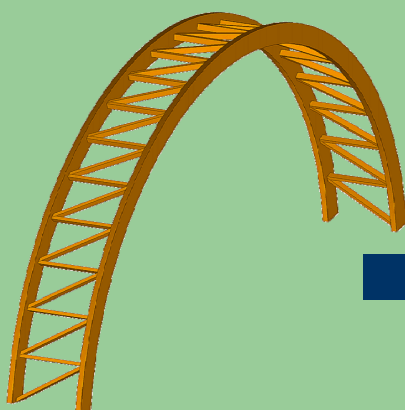


# Rácsozással merevített íves fatartók közelítő stabilitásvizsgálata



Dr. Bódi István, egyetemi docens  
Dr. Koris Kálmán, egyetemi adjunktus



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Építőmérnöki Kar  
Hidak és Szerkezetek Tanszék



ÉPKO 2014 - XVIII. Nemzetközi Építéstudományi Konferencia, Csíksomlyó 2014. június 12-15.

ÉPKO 2014 – XVIII. Nemzetközi Építéstudományi Konferencia  
Csíksomlyó, 2014 június 12-15.

## Problémafelvetés

### *Elfordulás ellen rugalmasan megtámasztott ívek kifordulásvizsgálata:*

- negyedrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldását teszi szükségessé:

$$\begin{aligned}
 & GI_t \left( \varphi'' + \frac{v_T''}{R} \right) - EI_\omega \left( \varphi^{IV} + \frac{v_T^{IV}}{R} \right) + x_0 N (v_T'' - x_0 \varphi'') - \\
 & - \frac{EI_x}{R} \left( \frac{\varphi}{R} - v_T'' \right) + N \left( \frac{t - x_0}{R} - \frac{i_x^2}{R^2} \right) \varphi - (i_x^2 + i_y^2) N \varphi'' + \\
 & + ct_c (v_T - t_c \varphi) - gt_g (v_T'' - t_g \varphi'') = 0, \\
 & EI_x \left( \frac{\varphi''}{R} - v_T^{IV} \right) + \frac{GI_t}{R} \left( \varphi'' + \frac{v_T''}{R} \right) - \frac{EI_\omega}{R} \left( \varphi^{IV} + \frac{v_T^{IV}}{R} \right) + \\
 & + N (x_0 \varphi'' - v_T'') - c (v_T - t_c \varphi) + g (v_T'' - t_g \varphi'') = 0.
 \end{aligned}$$

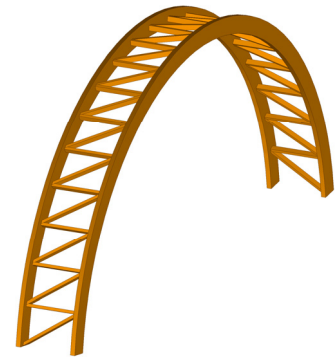
Ahol  $\varphi$  a nyírási középpont elfordulása, illetve  $v_T$  a nyírási középpont eltolódása.

- a kritikus nyomóerő ( $N$ ) meghatározása számos matematikai nehézséggel jár
- az ívekhez kapcsolt szerkezeti elemek rugalmas megtámasztásának figyelembevétele, mint a egyenletekből látható, jelentősen tovább bonyolítja az erőtani modellt és annak megoldását (zárt alakú megoldás csak "villás" megtámasztás esetére létezik)
- a fentiek miatt az előtervezés során egy egyszerűbb, közelítő módszer alkalmazása ajánlott

## Közelítő stabilitásvizsgálat módszere

A rácsozással merevített íves tartók (un. ívpárok) kifordulásának vizsgálatát, közelítő módon, a rugalmas stabilitáselmélet összegzési tételeinek alkalmazásával fogjuk bemutatni.

- az ívek hossza a kifordulás során nem változik
- a merevítés rácsos kialakítású az ívek hossza mentén
- a rácsozás hatása egy  $g$  megoszló rugórendszerrel helyettesíthető
- a vizsgálat egyetlen rugalmasan megtámasztott ív vizsgálatára redukálható



**Az ív kifordulását okozó nyomóerő:**

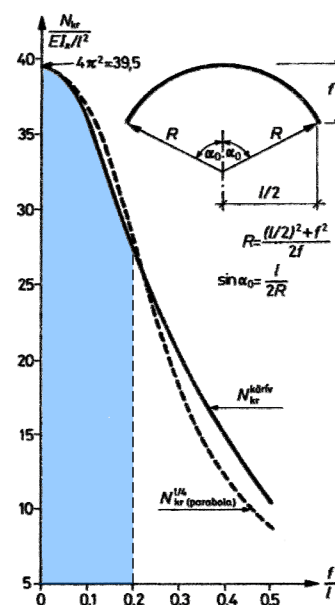
$$N_{kr} \approx N_{kr,0} + g + c \frac{(2\alpha_0 R)^2}{\pi^2 k^2}$$

- $N_{kr,0}$  – a rugalmas megtámasztás nélküli ív kifordulást okozó nyomóereje,  
 $g$  – az oldalirányú rugalmas elfordulással szembeni hatékony ágyazás rugótényezője [kN], amelyet a merevítőrácsozás jellemzőiből lehet meghatározni  
 $c$  – az oldalirányú rugalmas eltolódással szembeni hatékony ágyazás rugótényezője [kN/m<sup>2</sup>], amely ívpárok esetében közelítőleg zérusnak vehető

3

## Közelítő stabilitásvizsgálat módszere

**1.) A rugalmas megtámasztás nélküli ívek kifordulást okozó nyomóerejének ( $N_{kr,0}$ ) problémája sokkal több esetre megoldott a szakirodalomban **köríveknél**, továbbá ismert, hogy  $f/l < 0,2$  esetén a parabola ívtengely azonos  $f/l$  arányú körívvel való közelítése a biztonság javára adja a kritikus erőt, ezért a körívekre meghatározott értéket alkalmazzuk.**



4

## Közelítő stabilitásvizsgálat módszere

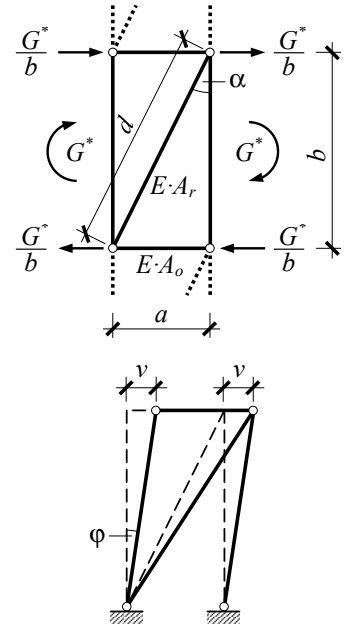
### 2.) A merevítő rácsozást helyettesítő, oldalirányú rugalmas ágyazás meghatározása

Az összekapcsolt ívpár, egy rácsozási egységének oldalirányú  $v$  alakváltozását meghatározzuk a  $G^*$  nyomaték-párból keletkező rúderők hatására.

A  $\varphi = v/b$  szögtorzulást egységnyinek felvéve, a merevítő rácsozást helyettesítő rugalmas ágyazás fajlagos rugótényezője az ábrán látható esetben:

$$g = \frac{G^*}{b} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{E \cdot A_r \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{1}{E \cdot A_o \cdot \cot \alpha}}$$

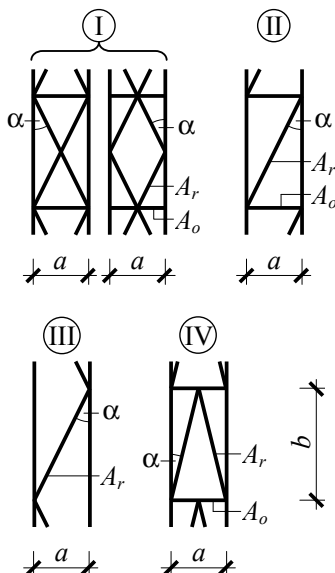
Más típusú rácsozások esetén a fentiekhez hasonló módon lehet a helyettesítő rugalmas ágyazás rugótényezőjét meghatározni.



5

## Közelítő stabilitásvizsgálat módszere

### 3.) További megvizsgált merevítő ráctípusok helyettesítő ágyazási tényezői



$$g_I = E \cdot A_r \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cot \alpha \cdot \beta}{2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \beta \cdot \cot \alpha}$$

$$g_{II} = E \cdot A_r \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cot \alpha \cdot \beta}{2(\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \beta \cdot \cot \alpha)}$$

$$g_{III} = \frac{1}{2} E \cdot A_r \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

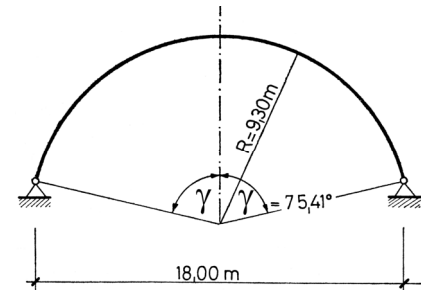
$$g_{IV} = E \cdot A_r \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cot \alpha \cdot \beta}{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \beta \cdot \cot \alpha}$$

6

# 1. számpélda

## a.) A vizsgált ívszerkezet adatai:

- kétcsuklós körív alakú ívpár
- egyenletesen megoszló radiális irányú teher
- az ív sugara  $R = 9,30$  m
- az ív fesztávolsága  $L = 18$  m
- az ívhosszhoz tartozó középponti szög  $\gamma = 75,41^\circ$
- az ívek távolsága  $a = 2,00$  m
- az ív keresztmetszete  $60 \times 16$  cm
- a rácsrudak keresztmetszete  $A_r = 5 \times 12$  cm =  $60$  cm<sup>2</sup>
- a rácsoszlopok keresztmetszete  $A_o = 5 \times 10$  cm =  $50$  cm<sup>2</sup>
- az ív merevségei:  $E \cdot I_\gamma = 2048$  kNm<sup>2</sup>;  $G \cdot I_T = 2726,5$  kNm<sup>2</sup>



A kétcsuklós körív rugalmas ágyazás nélküli, kifordulásához tartozó kritikus ereje [Timoshenko – Gere, 1961] alapján:  $N_{kr,0} = 1,9$  kN

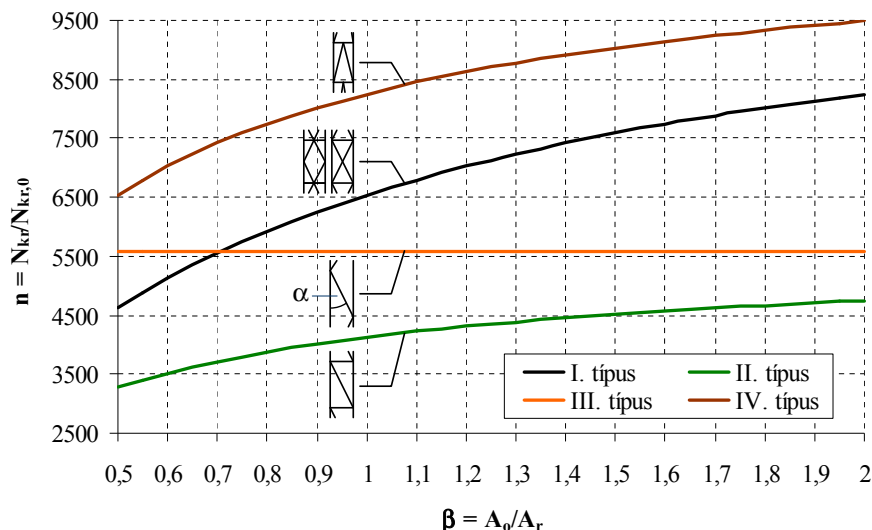
Az oldalirányú rugalmas elfordulással szembeni ágyazás rugótényezője:  $g_{II} = 6534,8$  kN

A rácsozással merevített ív kifordulásához tartozó kritikus ereje:  $N_{kr} = 6536,7$  kN

7

# 1. számpélda

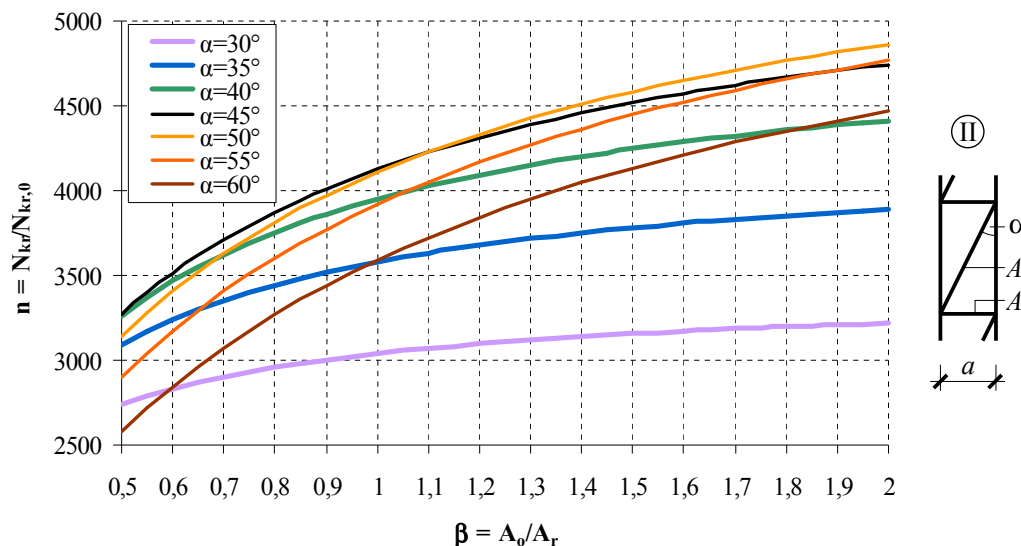
## b.) A merevítő rácsozás egyes típusainak a csuklós ívpár kifordulást okozó $N_{kr}$ kritikus erejére gyakorolt hatása ( $\alpha = 45^\circ$ esetén):



8

# 1. számpélda

c.) A rácsrúdmerevségek arányának és az  $\alpha$  hajlásszögének hatása az ív kritikus erejére a II. típusú rácsozás esetén:

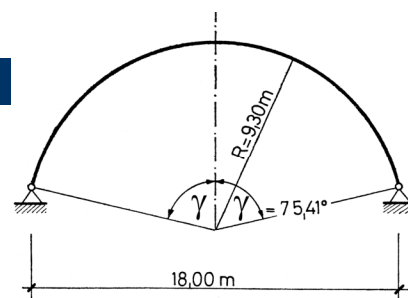


9

# 1. számpélda

d.) A közelítő eljárás pontosság vizsgálata egy adott példán:

Az ív geometriai és merevségi kialakítása azonos az előzőekben vizsgálttal, csupán a rugalmas elfordulással szembeni ágyazás származik más hatásból (ponyva).



**Ponyvával** megtámasztott ív esetén a kiforduláshoz tartozó **kritikus erő pontos értéke** [Kollár – Bódi, 1984] szerint:  $N_{kr,pontos} = 217,4 \text{ kN}$

**A bemutatott közelítő számítás szerint:**

Az ív rugalmas **ágyazás nélküli** kifordulásához tartozó kritikus ereje:  $N_{kr,0} = 1,9 \text{ kN}$

Az oldalirányú rugalmas elfordulással szembeni **ágyazás rugótényezője**:  $g_V = 216 \text{ kN}$

A kritikus erő:  $N_{kr,közelítő} = 1,9 + 216 = 217,9 \text{ kN}$

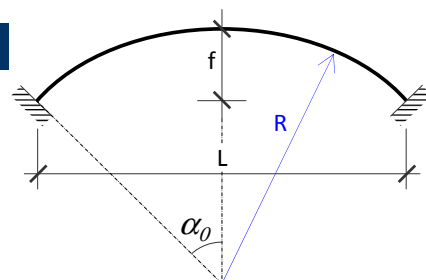
A közelítés pontossága:  $\Delta = 0,5/217,4 = 0,23\%$  azaz az eljárás kielégíti a mérnöki gyakorlat pontossági igényeit!

10

## 2. számpélda

### a.) A vizsgált ívszerkezet adatai:

- **Kétoldalon befogott parabola** alakú ívpár
- egyenletesen megoszló függőleges irányú teher
- az ív magassága  $f = 3,5$  m
- az ív fesztávolsága  $L = 18$  m
- az  $f/L$  arány:  $3,5/18 = 0,194 < 0,2$  tehát az ív alakja **körívvel** helyettesíthető:  
 $R = [(L/2)^2 + f^2]/(2f) = 13,32$  m, az ív félnyílás szöge:  $\alpha_0 = \arcsin(L/2R) = 42,5^\circ$
- az ív keresztmetszete  $60 \times 16$  cm
- $E \cdot I_y = 2048$  kNm<sup>2</sup>;  $G \cdot I_T = 2726,5$  kNm<sup>2</sup>



### b.) Eredmények:

A kétoldalon befogott (parabola ívet helyettesítő) körív rugalmas ágyazás nélküli, kifordulásához tartozó kritikus ereje [Timoshenko – Gere, 1961] alapján:  $N_{kr,0} = 177,6$  kN  
Az oldalirányú rugalmas elfordulással szembeni ágyazás rugótényezője:  $g_{II} = 6534,8$  kN  
A rácsozással merevített ív kifordulásához tartozó kritikus ereje:  $N_{kr} = 6712,4$  kN

11

## Összegzés

- A különböző rácsozás-típusokkal megtámasztott ívpárok mindegyike esetében tapasztalható volt, hogy a rácsozásból meghatározott, a kifordulással szemben működő  $g$  **ágyazási rugó hatása jelentős** (a legtöbb megvizsgált esetben, akár két nagyságrenddel nagyobb kritikus erő növekedést eredményezett a rugalmas megtámasztás nélküli ív kifordulását okozó kritikus erőhöz képest), természetesen ennek a rácsrudak kihajlása felső határt szabhat.
- Az ívpárok **merevítő rácsozásának figyelembevétele gazdaságos tartószerkezeti méretek kialakítását** teszi lehetővé a kifordulási vizsgálatok szempontjából.
- A bemutatott egyszerű eljárás további előnye, hogy az  $N_{kr,0}$  a rugalmas megtámasztás nélküli **főtartó ív** kifordulást okozó nyomóereje tartalmazza csak az adott ív statikai jellemzőit, a  $g$  ágyazási rugótényező pedig ezektől nem, csupán a **merevítő rácsozás** paramétereitől függ. A bemutatott egyszerűsített eljárás számos olyan esetben is alkalmazható, ahol a rugalmas megtámasztás nélküli ív kifordulást okozó nyomóereje a szakirodalomból már ismert.

12