Additív reprezentációfüggvények és Sidon - sorozatok

Kiss Sándor
Algebra Tanszék

Új Nemzeti Kiválóság Program

2019. május 30.

EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTÉRIUMA

Definíciók

Definíció

Jelölje $\mathbb{N}$ *a természetes számok halmazát. Legyen* $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ $(a_1 < a_2 < \ldots)$ *természetes számokból álló végtelen halmaz,* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ *rögzített és* $n \in \mathbb{N}$. *Jelölje az alábbi*

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} = n, \quad a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in A,$$

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} = n, \quad a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}, \quad a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in A,$$

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} = n, \quad a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_k}, \quad a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in A$$

egyenletek megoldásszámát rendre $R_1(A, n, k)$, $R_2(A, n, k)$, *illetve* $R_3(A, n, k)$.

Klasszikus problémák

Probléma (Waring-probléma)

Legyen $m \in \mathbb{N}$. Melyik az a legkisebb s úgy, hogy minden természetes szám felírható legfeljebb s darab m-dik hatvány összegeként?

Probléma (Goldbach-sejtés)

Minden kettőnél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként.

Sejtés (Erdős-Turán)

Ha $R_3(A, n, 2) > 0$ akkor $R_3(A, n, 2)$ nem lehet korlátos.

Hilbert-kocka

Legyen $\{h_1, h_2, \ldots,\}$ $(h_1 < h_2 < \ldots)$ pozitív egészek véges vagy végtelen sorozata.

$$H(h_1, h_2, \ldots) = \left\{ \sum_i \varepsilon_i h_i : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Hilbert-kocka

Legyen $\{h_1, h_2, \dots,\}$ $(h_1 < h_2 < \dots)$ pozitív egészek véges vagy végtelen sorozata.

$$H(h_1, h_2, \dots) = \left\{ \sum_i \varepsilon_i h_i : \varepsilon_i \in \{0,1\} \right\}.$$

A Hilbert-kocka páros része

$$H_0(h_1, h_2, \dots) = \left\{ \sum_i \varepsilon_i h_i : \varepsilon_i \in \{0,1\}, 2 | \sum_i \varepsilon_i \right\}.$$

A Hilber-kocka páratlan része

$$H_1(h_1, h_2, \dots) = \left\{ \sum_i \varepsilon_i h_i : \varepsilon_i \in \{0,1\}, 2 \nmid \sum_i \varepsilon_i \right\}.$$

Hilbert-kocka

A Hilbert-kocka $H(h_1, h_2, \dots)$ félig nem elfajuló ha

$$\sum_i \varepsilon_i h_i \neq \sum_i \varepsilon_i' h_i$$

ha $\sum_i \varepsilon_i \equiv \sum_i \varepsilon_i'$ mod 2, ahol $\varepsilon_i' \in \{0, 1\}$.

Hilbert-kocka

A Hilbert-kocka $H(h_1, h_2, \dots)$ félig nem elfajuló ha

$$\sum_i \varepsilon_i h_i \neq \sum_i \varepsilon_i' h_i$$

ha $\sum_i \varepsilon_i \equiv \sum_i \varepsilon_i' \mod 2$, ahol $\varepsilon_i' \in \{0, 1\}$.

Tétel (Kiss, Sándor, 2018)

Legyen $H(h_1, h_2, \dots)$ egy félig nem elfajuló Hilbert-kocka. Ha $A = H_0(h_1, h_2, \dots)$ és $B = H_1(h_1, h_2, \dots)$, akkor $R_2(A, n, 2) = R_2(B, n, 2)$ minden pozitív egész n-re.

Hilbert-kocka és additív reprezentációfüggvény

Tétel (Kiss, Sándor, 2018)

Legyenek $B = \{d_1, \dots, d_{2^m}\}$, $(0 < d_1 < d_2 < \dots < d_{2^m})$ *nemnegatív egészek, amelyekre* $d_{2^l+1} \geq 4d_{2^l}$, *minden* $l = 0, \dots, m-1$ *és*

$$d_{2^l} \leq d_1 + d_2 + d_3 + d_5 + \dots + d_{2^i+1} + \dots + d_{2^{l-1}+1}$$

minden $l = 2, \dots, m$. *Legyen* A *nemnegatív egészek olyan véges halmaza, hogy* $0 \in A$. *Ha minden* n *pozitív egészre* $R_2(A, n, 2) = R_2(B, n, 2)$ *teljesül, akkor*

$$A = H_0(d_1, d_2, d_3, d_5, \dots, d_{2^{m-1}+1}),$$

és

$$B = H_1(d_1, d_2, d_3, d_5, \dots, d_{2^{m-1}+1}).$$

Sejtés (Kiss, Sándor, 2018)

Legyenek A és B nemnegatív egészek olyan halmazai, amelyekre $A \cup B = \mathbb{N}$ és $A \cap B = \{r + m\mathbb{N}\}$, ahol $r \geq 0$, $m \geq 2$ egészek és minden pozitív egész n-re, $R_2(A, n, 2) = R_2(B, n, 2)$ teljesül. Ekkor létezik olyan $l \geq 1$ egész, hogy

$$A = H_0(1, 2, 4, \dots, 2^{2l-1}, 2^{2l}-1, 2^{2l+1}-1, 2(2^{2l+1}-1), 4(2^{2l+1}-1), \dots),$$

$$B = H_1(1, 2, 4, \dots, 2^{2l-1}, 2^{2l}-1, 2^{2l+1}-1, 2(2^{2l+1}-1), 4(2^{2l+1}-1), \dots).$$

Partíciók és reprezentációfüggvények

Tétel (Kiss, Sándor, 2018)

Tegyük fel, hogy ha C és D olyan végtelen halmazok, amelyekre $0 \in C$ és $R_2(C, n, 2) = R_2(D, n, 2)$ teljesül minden n-re, akkor C és D egy alkalmas félig nem elfajuló Hilbert-kocka páros ill. páratlan része. Ekkor léteznek olyan A és B nemnegatív egészekből álló különböző végtelen halmazok, hogy $A \cup B = \mathbb{N}$ és $A \cap B = \{r + m\mathbb{N}\}$, ahol $r \geq 0$, $m \geq 2$ egészek és minden n pozitív egészre, $R_2(A, n, 2) = R_2(B, n, 2)$ akkor és csak akkor ha létezik olyan $l \geq 1$ egész, hogy

$$A = H_0(1, 2, 4, \dots, 2^{2l-1}, 2^{2l}-1, 2^{2l+1}-1, 2(2^{2l+1}-1), 4(2^{2l+1}-1), \dots),$$

$$B = H_1(1, 2, 4, \dots, 2^{2l-1}, 2^{2l}-1, 2^{2l+1}-1, 2(2^{2l+1}-1), 4(2^{2l+1}-1), \dots).$$

A generátorfüggvény módszer

A generátorfüggvény - módszer lényege az, hogy tekintjük az $A \subset \mathbb{N}$ végtelen sorozat generátorfüggvényét:

$$f(z) = \sum_{a \in A} z^a.$$

Könnyen belátható, hogy

$$f^k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_1(A, n, k) z^n.$$

Definíciók

Definíció

Pozitív egészek egy A halmaza Sidon-halmaz, ha $R_3(A, n, 2) \leq 1$ minden pozitív egész n-re.

Definíció

Legyen $g \geq 1$ rögzített egész. Pozitív egészek egy A halmaza $B_h[g]$ halmaz ha $R_3(A, n, h) \leq g$ minden pozitív egész n-re.

Definíció

Pozitív egészek egy A halmaza k-ad rendű aszimptotikus bázis ha $R_3(A, n, k) > 0$ minden elég nagy pozitív egész n-re.

Definíciók

Probléma (Erdős)

Van-e olyan Sidon-halmaz, ami harmadrendű aszimptotikus bázis?

Definíciók

Probléma (Erdős)

Van-e olyan Sidon-halmaz, ami harmadrendű aszimptotikus bázis?

Tétel (Kiss, Sándor 2019)

Minden $h > 1$ egész számra létezik olyan $B_h[1]$ sorozat, ami $2h + 1$-ed rendű aszimptotikus bázis.

Véletlen módszer

Legyen Ω pozitív egészekből álló szigorúan növő sorozatok halmaza.

Lemma

Legyenek

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \tag{1}$$

olyan valós számok amelyekre

$$0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{2}$$

Ekkor létezik olyan valószínűségi mező (Ω, X, P), *amelyre*

(i) *Minden n természetes számra*

$$\mathcal{E}^{(n)} = \{A : A \in \Omega, n \in A\}$$

mérhető, és $P(\mathcal{E}^{(n)}) = \alpha_n$.

(ii) *Az* $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$, ... *események függetlenek.*

Véletlen módszer

Jelölje az $\mathcal{E}^{(n)}$ esemény indikátor függvényét $\varrho(A, n)$:

$$\varrho(A, n) = \begin{cases} 1, \text{ if } n \in A \\ 0, \text{ if } n \notin A. \end{cases}$$

$$R_2(A, n, k) = \sum_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k \\ 1 \le a_1 < \ldots < a_k < n \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n}} \varrho(A, a_1)\varrho(A, a_2) \ldots \varrho(A, a_k).$$

Bizonyítás

Legyen α olyan valós szám, amelyre $\alpha = \frac{2}{4h+1}$. Definiáljuk az A véletlen halmazt a következőképpen:

$$P(n \in A) = \frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

Bizonyítás

Legyen α olyan valós szám, amelyre $\alpha = \frac{2}{4h+1}$. Definiáljuk az A véletlen halmazt a következőképpen:

$$P(n \in A) = \frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

- $R_3(A, n, 2h+1) > 0$ teljesül 1 valószínűséggel, ha n elég nagy.

Bizonyítás

Legyen α olyan valós szám, amelyre $\alpha = \frac{2}{4h+1}$. Definiáljuk az A véletlen halmazt a következőképpen:

$$P(n \in A) = \frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

- $R_3(A, n, 2h+1) > 0$ teljesül 1 valószínűséggel, ha n elég nagy.
- $R_3(A, n, h) \leq 1$ teljesül 1 valószínűséggel, ha n elég nagy.

Bizonyítás

Legyen α olyan valós szám, amelyre $\alpha = \frac{2}{4h+1}$. Definiáljuk az A véletlen halmazt a következőképpen:

$$P(n \in A) = \frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

- $R_3(A, n, 2h+1) > 0$ teljesül 1 valószínűséggel, ha n elég nagy.
- $R_3(A, n, h) \leq 1$ teljesül 1 valószínűséggel, ha n elég nagy.
- Elhagyjuk A véges sok elemét. Az így kapott halmaz továbbra is aszimptotikus bázis marad.